METODOS NUMERICOS PARA INGENIERIA

ING. RICARDO SEMINARIO VASQUEZ

INDICE DE MATERIAS

INTRODUCCION AL ANALISIS NUMERICO

PRESENTACION

Al momento de aplicar las Matemáticas a situaciones del mundo real nos encontramos a menudo con problemas que no pueden ser resueltos analíticamente o de manera exacta y cuya solución debe ser abordada con ayuda de algún procedimiento numérico. A continuación consideramos algunos problemas típicos, ya formulados matemáticamente, para los cuales estudiaremos técnicas numéricas de solución.

Este libro nace después de una experiencia en la enseñanza del curso del mismo nombre en la Universidad Cesar Vallejo de Piura, durante cinco años. En la primera parte estudiamos la teoría de errores, en la segunda parte la interpolación lineal y la interpolación polinomial aplicada a la solución de derivadas.

Aplicamos a la solución de ecuaciones no lineales, los métodos de bisección, punto fijo y Newton Raphson y para las ecuaciones lineales los métodos de Gauss Jordan.

En el caso de las integrales definidas, aplicamos los métodos del trapecio, metodo de Simpson 1/3 y Simpson 3/8.

Concluyendo este libro con la solución numérica de ecuaciones diferenciales, mediante los métodos de Euler y Runge Kutta.

EL AUTOR

¿Qué es un método numérico?

Un método numérico es un procedimiento mediante el cual se obtiene, casi siempre de manera aproximada, la solución de ciertos problemas realizando cálculos puramente aritméticos y lógicos (operaciones aritméticas elementales, cálculo de funciones, consulta de una tabla de valores, cálculo preposicional, etc.). Un tal procedimiento consiste de una lista finita de instrucciones precisas que especifican una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas (algoritmo), que producen o bien una aproximación de la solución del problema (solución numérica) o bien un mensaje. La eficiencia en el cálculo de dicha aproximación depende, en parte, de la facilidad de implementación del algoritmo y de las características especiales y limitaciones de los instrumentos de cálculo (los computadores). En general, al emplear estos instrumentos de cálculo se introducen errores llamados de redondeo.

$$\pi = 3.141592653\ldots \text{ (irracional)}$$
$$= (.3141592653\ldots) \times 10^{1} \text{ (forma decimal normalizada)}$$

Entonces

$$fl(\pi) = \begin{cases} (.31415) \times 10^{1}, & \text{cortando} \\ (.31416) \times 10^{1}, & \text{redondeando} \end{cases}$$

$$x = -123456789 \text{ (racional)}$$
$$= -(.123456789) \times 10^{9} \text{ (forma decimal normalizada)}$$

Entonces

$$fl(x) = \begin{cases} -(.12345) \times 10^{9}, & \text{cortando} \\ -(.12346) \times 10^{9}, & \text{redondeando} \end{cases}$$

$$y = .0000213475 \text{ (racional)}$$
$$= (.213475) \times 10^{-4} \text{ (forma decimal normalizada)}$$

Entonces

$$fl(y) = \begin{cases} (.21347) \times 10^{-4}, & \text{cortando} \\ (.21348) \times 10^{-4}, & \text{redondeando} \end{cases}$$

Qué pasa si se redondea el número y antes de normalizarlo?

$$z = \frac{2}{3} = .6666666\ldots \text{ (racional, periódico)}$$
$$= (.6666666\ldots) \times 10^{0} \text{ (forma decimal normalizada)}$$

Entonces

$$fl(z) = \begin{cases} (.66666) \times 10^{0}, & \text{cortando} \\ (.66667) \times 10^{0}, & \text{redondeando} \end{cases}$$

ERRORES DE CÁLCULO

- Notación científica (punto flotante)
  - Ejemplo :
    - $2 * 10^{2} = 200$
    - $5769 = 5.769 * 10^{3}$
    - $176936 = 1.77 * 10^{5}$
    - $0.00536 = 5.36 * 10^{-3}$
    - $0.0000798 = 7.98 * 10^{-5}$

Ejercicios

Realizar las siguientes operaciones:

a) $0.5971 * 10^{3} + 0.4268 * 10^{-5}$

expresar el resultado en base a 10^3 y 10^{-5}

<u>solución</u>

$0.5971 * 10^3 + 0.4268 * 10^{-5} \quad = 0.5971 * 10^3 + 0.000004268 * 10^{-5}$

b) $0.5971 * 10^{-3} + 0.4268 * 10^{-6}$

TIPOS DE ERRORES

- error absoluto y error relativo

Sean las variables :

a = valor aproximado

a* = valor real

- el valor absoluto = E

$$\boxed{E = | a^* - a |}$$

- El valor relativo = E_r

$$\boxed{E_r = E / a^*}$$

El cual es llamado error porcentual

Ejemplo :

- Calcular el error absoluto y relativo de a* y a
  - o a $=0.50 * 10^{-2}$
  - o a*$=0.51 * 10^{2}$

solución

E = | a*- a |

$0.51*10^2 - 0.50 * 10^2 = 0.01 * 10^2 = 1.00$

$$\boxed{E_r = E/ a^*}$$

$(0.01 * 10^2)/0.50 *10^2 = 0.02 * 100 = 2\%$

ALGORITMOS BASICOS

Ejemplo programado en lenguaje C++

Programa cálculo del promedio

```
//programa para calcular el promedio de "m" números ingresados
#include<conio.h>
#include<iostream.h>
#include<math.h>
void main()
{
int x,sum,m,cont;
int prom;
cont=0;
cout<<"ingrese el total de números a sumar :";
cin>>m;
do
{
cont+=1;
cout<<"ingrese el numero a sumar :";
cin>>x;
```

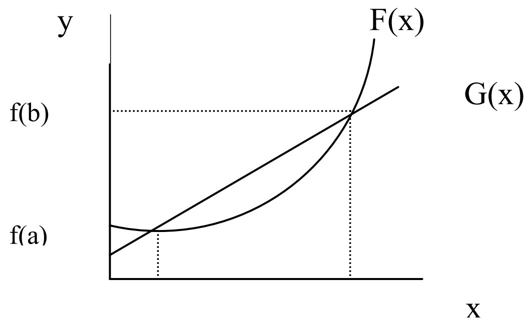
```
sum+=x;
}
while (cont<m);
cout<<"la suma es  :";
cout<< sum;
prom=sum/m;
cout<<"\a el promedio es   :  ";
cout<<prom;
getch();
}
```

Ejercicios propuestos

- Calcular la suma de los “N” números ingresados por teclado
- Calcular la suma de los “N” primeros números
- Calcular el factorial de un numero

INTERPOLACIÓN LINEAL

Concepto : Interpolar significa encontrar un valor intermedio entre dos o mas puntos base conocidos, los cuales se pueden aproximar mediante polinomios.



Sea en el sistema de coordenadas de la grafica anterior, las ecuaciones F(x) y G(x) en cuyo espacio "a", "b" se pueden interpolar determinados valores.

Tipos de interpolación

1. interpolación con espacios equidistantes
2. interpolación con espacios no equidistantes

INTERPOLACIÓN CON ESPACIOS EQUIDISTANTES O INTERPOLACION DE NEWTON

- DIFERENCIAS PROGRESIVAS : Son llamadas diferencias hacia delante y se definen como :

    - primeras diferencias : $\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i$ i=0,1,2,3...n (1)
    - segundas diferencias : $\Delta^2 Yi = \Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i$ i=0,1,2,3...n (2)
    - terceras diferencias : $\Delta^3 Y_i = \Delta^2 Y_{i+1} - \Delta^2 Y_i$ i=0,1,2,3...n (3)

$\vdots$

- k- écimas diferencias $\Delta\,^{k}Y_i = \Delta\, k^{k-1}Y_{i+1} - \Delta\,^{k-1}Y_i$

  i=0,1,2,3...n (4)

  k=0,1,2,3...n

donde :

Δ es el operador de diferencias progresivas

Para i=0 en la ecuación (1)

$\Delta Y_0 = Y_1 - Y_0 \longrightarrow Y_1 = Y_0 + \Delta Y_0$

(5)

Para i=1 en la ecuación (1)

$\Delta Y_1 = Y_2 - Y_1 \longrightarrow Y_2 = Y_1 + \Delta Y_1$

(6)

Para i=0 en la ecuación (2)

$\Delta\,^{2}Y_0 = \Delta\, Y_1 - \Delta\, Y_0 \longrightarrow \Delta\, Y_1 = \Delta\,^{2}Y_0 + \Delta Y_0$ (7)

Sustituyendo las ecuaciones (7) y (5) en (6)

$Y_2 = Y_1 + \Delta Y_1$

$Y_2 = (Y_0 + \Delta Y_{0)} + (\Delta\,^{2}Y_0 + \Delta Y_0)$

$Y_2 = Y_0 + 2\Delta Y_0 + \Delta\,^{2}Y_0$ (8)

De las ecuaciones (5) y (8)

$Y_1 = Y_0 + \Delta Y_0$	sacando factor comun Y_0	tenemos : $Y_1 = (1 + \Delta)^1 Y_0$
$Y_2 = Y_0 + 2\Delta Y_0 + \Delta\, 2Y_0$	sacando factor comun Y_0	tenemos : $Y_2 = (1 + \Delta)^2 Y_0$

Entonces para Y_3

$$Y_3 = (1 + \Delta)^3 Y_0 \qquad (9)$$

Generalizando, tendremos :

$$Y_k = (1 + \Delta)^k Y_0 \qquad (10)$$

El Segundo miembro de la ecuación (10) corresponde al **Binomio de Newton** Elevado al exponente “k”, el cual puede desarrollarse del siguiente modo:

$$Y_k = Y_0 + \binom{k}{1}\Delta Y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 Y_0 + \;..... + \binom{k}{k}\Delta^k Y_0 \qquad (11)$$

Para : K= 1,2,3, ...n

$$Y_k = Y_0 + \binom{k}{1}\Delta Y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 Y_0 + \;.... \binom{k}{j}\Delta^k Y_0 + \binom{k}{j+1} 0$$

(12)

Para : K= 1,2,3, ...n

Si se toma un valor “j” cualquiera menor que “k” y si las j-esimas diferencias son constantes, entonces todas las diferencias de orden superior a “j” serán cero, por lo que la ecuación (11) queda :

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)!\,j!} = \frac{k(k-1)(k-2)...(k-j+1)!}{j!}$$

donde :

$\binom{k}{j}$ es un polinomio en K de grado “j” de la forma :

$$\boxed{y_k = a_0 + a_1k + a_2^2k^2 + \ldots\ldots .+ a^jk^j \qquad (14)}$$

Si consideramos la función tabular con espaciamiento “h”constante

X	**Y**
X_0	Y_0
$X_1=X_0+h$	Y_1
$X_2=X_0+2h$	Y_2
...	...
$X_k=X_0+kh$	Y_K
$X_n=X_0+nh$	Y_n

Donde :

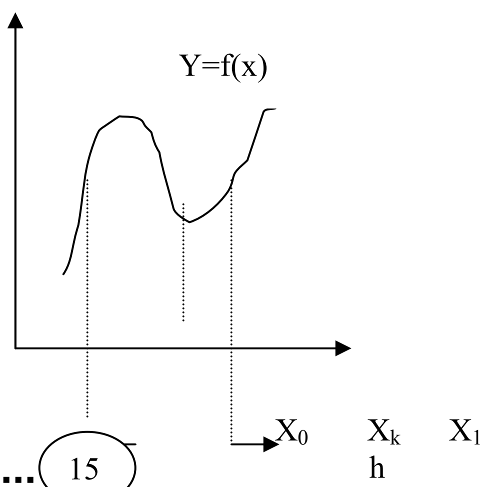
$X_1-X_0 = h$

$X_2-X_0 = 2h$

....

$X_K-X_0 = Kh$

$X_n-X_0 = nh$



Donde queda la expresión: $K = \dfrac{X_k - X_0}{h}$ 15

Sustituyendo (15) en (14)

$$Y_k = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots .+ b_jx^j$$

Se llama **Polinomio de Newton** con espaciamiento constante

Ejercicio 01

En base a la función tabular que se muestra, preparar la tabla de diferencias:

X	Y
0	-5
1	1
2	9
3	25
4	55
5	105

Solución

las primeras diferencias son :

$\Delta^1Y_0 = Y_1-Y_0 \quad = 1-(-5) \quad = 6$

$\Delta^1Y_1 = Y_2-Y_1 \quad = 9 - 1 \quad = 8$

$\Delta^1Y_2 = Y_3-Y_2 \quad = 25- 9 \quad =16$

$\Delta^1Y_3 = Y_4-Y_3 \quad = 55-25 \quad =30$

$\Delta^1Y_4 = Y_5-Y_4 \quad = 105-55 =50$

las segundas diferencias son :

$\Delta^2Y_0 = \Delta Y_1- \Delta Y_0 \quad = 8 - 6 \quad = 2$

$\Delta^2Y_1 = \Delta Y_2- \Delta Y_1 \quad = 16 - 8 \quad = 8$

$\Delta^2 Y_2 = \Delta Y_3 - \Delta Y_2 \quad = 30 - 16 \;=14$

$\Delta^2 Y_3 = \Delta Y_4 - \Delta Y_3 \quad = 50 - 30 \;=20$

las terceras diferencias son :

$\Delta^3 Y_0 = \Delta^2 Y_1 - \Delta^2 Y_0 = 8 - 2 = 6$

$\Delta^3 Y_1 = \Delta^2 Y_2 - \Delta^2 Y_1 = 14 - 8 = 6$

$\Delta^3 Y_2 = \Delta^2 Y_3 - \Delta^2 Y_2 = 20 - 14 = 6$

Queda entonces la tabla de resultados:

X	Y	$\Delta^1 Y$	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$
0	-5			
1	1	6		
2	9	8	2	
3	25	16	8	6
4	55	30	14	6
5	105	50	20	6

Por ser $\Delta^3 Y$ constante, corresponde a un polinomio de tercer grado y es un polinomio exacto

En la ecuación (12)

$$\boxed{Y_k = Y_0 + \binom{k}{1}\Delta^1 Y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 Y_0 + \ldots \binom{k}{j}\Delta^k Y_0 + \binom{k}{j+1} 0}$$

Si hacemos J=1, entonces tendremos el polinomio de primer grado que se aproxima a f(x)

$$\boxed{Y_k = Y_0 + \binom{k}{1}\Delta Y_0}$$

Siendo :

$$\boxed{K = \frac{X_k - X_0}{h}}$$

Tendremos :

$$\boxed{Y_k = Y_0 + \left(\frac{X_k - X_0}{h}\right)\Delta Y_0}$$

Que corresponde a un polinomio de primer grado

Ejercicio 02

De la tabla del ejercicio 01, hallar la función explicita, teniendo como condiciones iniciales: $X_0 = 1$, $Y_0 = 1$

solución

$$\boxed{K = \frac{X_k - X_0}{h}}$$

Como por dato tenemos $X_0=1$, siendo los valores de X constantes, entonces h=1
$\Delta^1 Y_0=8$, $\Delta^2 Y_0=8$, $\Delta^3 Y_0=6$

$$\boxed{K = \frac{X - 1}{1}}$$

Quedando :

K = x - 1

Reemplazando en la ecuación general :

$$Y_k = Y_0 + \binom{k}{1}\Delta^1 Y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 Y_0 + \ \ldots.\ \binom{k}{j}\Delta^k Y_0 + \binom{k}{j+1} 0$$

$$Y_k = Y_0 + \binom{x-1}{1}\Delta^1 Y_0 + \binom{x-1}{2}\Delta^2 Y_0 + \binom{x-1}{3}\Delta^3 Y_0$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$\Delta^1 Y_0=8$, $\Delta^2 Y_0=8$, $\Delta^3 Y_0=6$

$$Y_k = Y_0 + \binom{x-1}{1}8 + \binom{x-1}{2}8 + \binom{x-1}{3}6$$

Conociendo por formula de permutaciones:

$$\binom{x-1}{1} = \frac{(x-1)}{1}$$

$$\binom{x-1}{2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$\binom{x-1}{3} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$

$$Y_k = 1 + \frac{(x-1)}{1}*8 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}*8 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}*6$$

Y = 1+(x-1)*8 + (x-1)(x-2)*4 + (x-1)(x-2)(x-3)*1

Simplificando queda :

$Y = X^3 - 2X^2 + 7X - 5$ **SOLUCION PEDIDA**

INTERPOLACION CON ESPACIOS NO EQUIDISTANTES O INTERPOLACION DE LAGRANGE

Si se presenta una función tabulada de la forma :

X	Y
X_0	Y_0
$X_1=X_0+h_0$	Y_1
$X_2=X_1+h_1$ ...	Y_2 ...
Xk=X0+kh	YK
Xn=Xn- 1+hn-1	Yn

Entonces el polinomio :

$$\boxed{Y_k = b_0x_1 + b_1x_{n-1} + b_2x_{n-2} + \ldots\ldots .+ b_{n-1}x^j + b_n}$$

O bien :

$$\begin{aligned} Y = {} & a_0 (x- x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ \ldots \ (x-x_n) \\ & + a_1 (x- x_0)(x-x_2)(x-x_3) \ \ldots \ (x-x_n) \\ & + a_0 (x- x_0)(x-x_1)(x-x_3) \ \ldots \ (x-x_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots .+ a_n (x- x_0)(x-x_1)(x-x_2) \ \ldots \ (x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, se determinan de tal modo que el polinomio pase por todos y cada uno de los puntos conocidos de la función, entonces si se evalúa la función anterior para $x= x_0$ se tiene :

$$Y_0 = a_0 (x- x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ \ldots \ (x-x_n) \qquad \text{donde :}$$

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)...(x_0 - x_n)}$$

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)...(x_1 - x_n)}$$

……..

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)...(x_n - x_{n-1})}$$

Sustituyendo en la ecuación de Lagrange

$$Y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)...(x_0 - x_n)} y_0$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)...(x_1 - x_n)} y_1$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3).....(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)...(x_2 - x_n)} y_2$$

....

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).....(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)...(x_n - x_{n-1})} y_1 \quad ....(2)$$

o simplemente :

$$\sum \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} y_i$$

Ejercicio 01

- dada la siguiente función tabular, encontrar el valor de la función para x=3

X	Y
0	5
1	7
2	9
5	15

<u>Solución</u>

Reemplazando en la ecuación (2) :

$$Y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

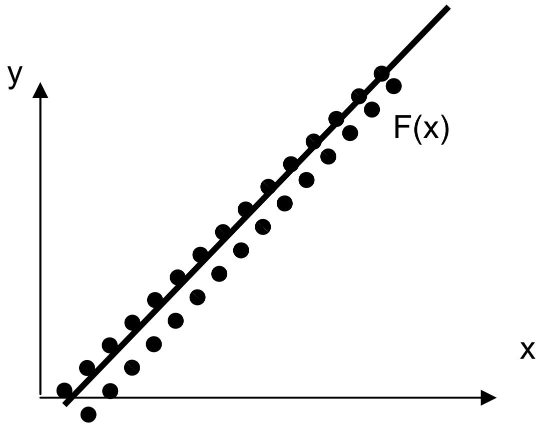
haciendo x=3

$$Y = \frac{(3-1)(3-2)(3-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)}*5 + \frac{(3-0)(3-2)(3-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)}*7$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)}*9 + \frac{(3-0)(3-1)(3-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)}15$$

Y= 11	solución buscada

APROXIMACIÓN LINEAL



Si tenemos una nube de puntos, a los cuales queremos aproximar a una linea recta, esta se obtiene mediante formulas.

Sea la función genérica:

Y = B + A*X

Donde:

$$A = \frac{N\sum(XY) - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$B = \frac{\sum Y - A\sum X}{N}$$

<u>**EJEMPLO**</u>

F(x) = 5 + 3x

Solución

x	y	xy	x^2
1	1	1	1
1.8	1.5	2.7	3.24
2	2.5	5	4
2.5	2.8	7	6.25
3	4	12	9
5	6	30	25
15.3	17.8	57.7	48.49
234.1			

donde :

$\left(\sum x\right)^2$ =234.1 $\sum y$ =17.8

$\sum x$ =15.3 $\sum xy$ =57.7

$\sum (x)^2$ =48.49

aplicando los resultados de la tabla a la formula :

$$A = \frac{N\sum(XY) - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$B = \frac{\sum Y - A\sum X}{N}$$

$$A = \frac{6(57.7) - (15.3)(17.8)}{6(48.49) - 234.09} = 1.299$$

$$B = \frac{17.8 - 1.299(15.3)}{6} = -0.346$$

Entonces la recta es:

$$Y = -0.346 + 1.299X$$

la nueva tabla seria :

x	y
1	0.953
1.8	1.992
2	2.252
2.5	2.902
3	3.551
5	6.149

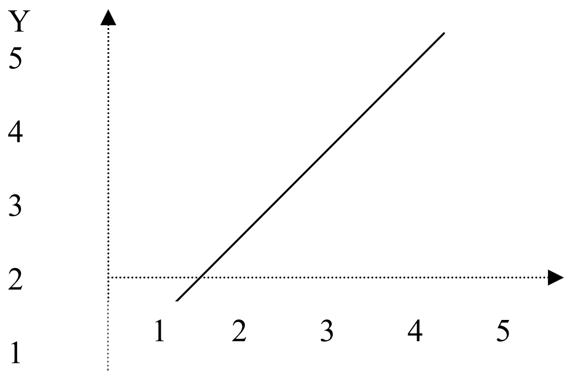
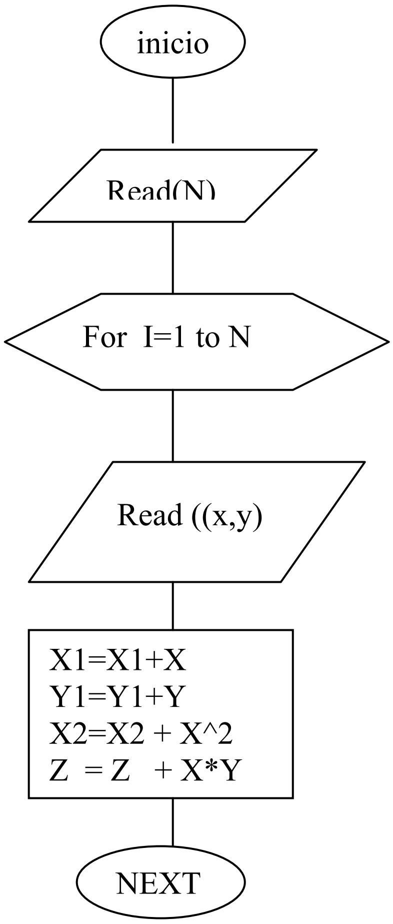


Diagrama de flujo

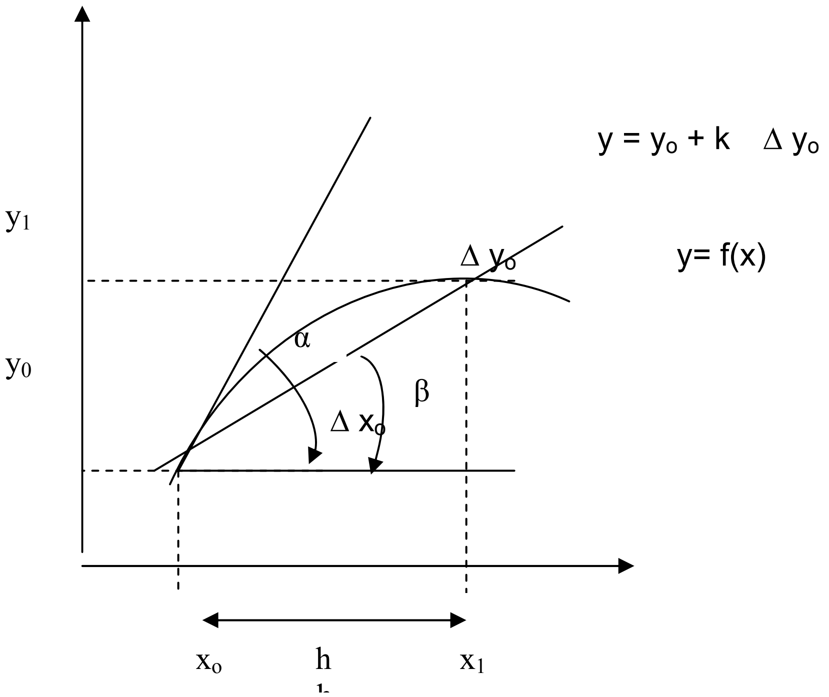


$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{N\sum(XY)-\sum X\sum Y}{N\sum X^2-(\sum X)^2} \\ B &= \frac{\sum Y - A\sum X}{N} \end{aligned}}$$

CALCULO DE DERIVADAS

Sea la función: y= f(x)

Se desea calcular la derivada de la función f(x), para lo cual lo expresamos gráficamente asi:



$$\text{tg } \alpha = \frac{d}{dx}$$

tg β = $\frac{\Delta \text{ yo}}{\text{h}}$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3k^2-6k+2}{6}\Delta^3 y_0 + ...\right]$$

Calculo de la primera derivada

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{h}[\Delta y_0]$ donde: Δ y_o = $y_1 - y_0$

El problema de la derivada consiste en obtener el valor de las derivadas en una función tabulada en algunos puntos:

x = $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$

si : y_k = $f(x_k)$ $y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 \ldots\ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0$

La primera derivada es :

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

considerando que : $k = \frac{x - x_0}{h}$ y $\frac{dk}{dx} = \frac{1}{h}$ ....(2)

$$\binom{k}{1} = \frac{k(k-1)}{k-1} = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)(k-2)}{(k-2)2!} = \frac{k(k-1)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Reemplazando en (2),(3),(4),(5) en (1), y derivando, tenemos:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{h}\frac{d}{dk}\left[y_0 + (k)\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots\right]$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{(2k-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3k^2 - 6k + 2)}{6}\Delta^3 y_0 + ...\right]$$

Formula de derivación de dos puntos:

$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{h}[\Delta y_0.] + e$ donde : “e” es un error por truncamiento y

Δ yo = $y_1 - y_0$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{h}[y_1 - y_0.] + e$$

Esta formula permite encontrar la función tabular $x = x_0$ mediante un polinomio interpolante de primer grado, tenemos:

$$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_0} \qquad y'_0 = \frac{1}{h}[-y_0 + y_1.] + e$$

si deseamos encontrar la derivada de la función tabular en $x = x_1$ mediante un polinomio interpolante de primer grado, tenemos:

$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_1} \qquad y'_0 = \frac{1}{h}[-y_1 + y_2.] + e$ y así sucesivamente.

Formula de derivación de tres puntos: (polinomio interpolante de segundo grado)

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{(2k-1)}{2}\Delta^2 y_0\right] + \text{e}$$

donde: $\Delta^2 Y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

: Δ yo = $y_1 - y_0$ Δ y_1 = $y_2 - y_1$ haciendo K=0

Reemplazando nos queda:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{-1)}{2}\Delta^2 y_0\right] + \text{e} \qquad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2h}\left[2\Delta y_0 - \Delta^2 y_0\right] + \text{e}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2h}\left[2\Delta y_0 - (\Delta y_1 - \Delta y_0)\right] + \text{e} \qquad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2h}\left[2\Delta y_0 - \Delta y_1 + \Delta y_0\right] + \text{e}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2h}\left[3\Delta y_0 - \Delta y_1\right] + \text{e} \qquad = \frac{1}{2h}\left[3(y_1 - y_0) - (y_2 - y_1)\right]$$

$$= \frac{1}{2h}\left[3y_1 - 3y_0 - y_2 + y_1)\right] \qquad = \frac{1}{2h}\left[4y_1 - 3y_0 - y_2)\right]$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2)\right] + \text{e}}$$

SOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES

- METODO DE BISECCION
- METODO DEL PUNTO FIJO
- METODO DE NEWTON RAPHSON

MÉTODO DE BISECCIÓN

El método de bisección se basa en el siguiente teorema de Cálculo:
Teorema del Valor Intermedio
Sea $f(x)$ contínua en un intervalo $[a,b]$ y supongamos que $f(a) < f(b)$.
Entonces para cada z tal que $f(a) < z < f(b)$, existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = z$. La misma conclusión se obtiene para el caso que $f(a) > f(b)$.
Básicamente el Teorema del Valor Intermedio nos dice que toda función contínua en un intervalo cerrado, una vez que alcanzó ciertos valores en los extremos del intervalo, entonces debe alcanzar todos los valores intermedios.
En particular, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces un valor intermedio es precisamente $z = 0$, y por lo tanto, el Teorema del Valor Intermedio nos asegura que debe existir $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir, debe haber por lo menos una raíz de $f(x)$ en el intervalo (a,b).
El método de bisección sigue los siguientes pasos:
Sea $f(x)$ contínua,

i) Encontrar valores iniciales x_a, x_b tales que $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos, es decir,

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

ii) La primera aproximación a la raíz se toma igual al punto medio entre x_a y x_b:

$$x_r = \frac{x_a + x_b}{2}$$

iii) Evaluar $f(x_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

$$f(x_a)\cdot f(x_r)<0$$

En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen signos opuestos, y por lo tanto la raíz se encuentra en el intervalo $[x_a, x_r]$.

$$f(x_a)\cdot f(x_r)>0$$

En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen el mismo signo, y de aquí que $f(x_r)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_r, x_b]$.

$$f(x_a)\cdot f(x_r)=0$$

En este caso se tiene que $f(x_r)=0$ y por lo tanto ya localizamos la raíz.
El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\epsilon_a|<\epsilon_s$$

es decir,

$$\left|\frac{x_{actual}-x_{previa}}{x_{actual}}\times 100\%\right|<\epsilon_s$$

Ejemplo 1

Aproximar la raíz de $f(x)=e^{-x}-\ln x$ hasta que $|\epsilon_a|<1\%$.

Solución

Sabemos por lo visto en el ejemplo 1 de la sección anterior, que la única raíz de $f(x)$ se localiza en el intervalo $[1,1.5]$. Así que este intervalo es nuestro punto de partida; sin embargo, para poder aplicar el método de bisección debemos checar que $f(1)$ y $f(1.5)$ tengan signos opuestos.

En efecto, tenemos que

$$f(1)=e^{-1}-\ln 1=e^{-1}>0$$

mientras que

$$f(1.5)=e^{-1.5}-\ln(1.5)=-0.18233<0$$

Cabe mencionar que la función $f(x)$ sí es contínua en el intervalo $[1,1.5]$. Así pues, tenemos todos los requisitos satisfechos para poder aplicar el método de bisección. Comenzamos:

i) Calculamos el punto medio (que es de hecho nuestra primera aproximación a la raíz):

$$x_{r_1} = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

ii) Evaluamos $f(1.25) = e^{-1.25} - \ln(1.25) = 0.0636 > 0$

iii) Para identificar mejor en que nuevo intervalo se encuentra la raíz, hacemos la siguiente tabla:

$f(1)$	$f(1.25)$	$f(1.5)$
+	+	−

Por lo tanto, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25,1.5]$.

En este punto, vemos que todavía no podemos calcular ningún error aproximado, puesto que solamente tenemos la primera aproximación. Así, repetimos el proceso con el nuevo intervalo $[1.25,1.5]$.

Calculamos el punto medio (que es nuestra segunda aproximación a la raíz):

$$x_{r_2} = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$$

Aquí podemos calcular el primer error aproximado, puesto que contamos ya con la aproximación actual y la aproximación previa:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_2} - x_{r_1}}{x_{r_2}} \times 100\% \right| = 9.09\%$$

Puesto que no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso.

Evaluamos $f(1.375) = e^{-1.375} - \ln(1.375) = -0.06561 < 0$, y hacemos la tabla:

$f(1.25)$	$f(1.375)$	$f(1.5)$
+	−	−

Así, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25,1.375]$.

Calculamos el punto medio,

$$x_{r_3} = \frac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$$

Y calculamos el nuevo error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_3} - x_{r_2}}{x_{r_3}} \times 100\% \right| = 4.76\%$$

El proceso debe seguirse hasta cumplir el objetivo.

Resumimos los resultados que se obtienen en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1.25	
1.375	9.09%
1.3125	4.76%
1.28125	2.43%
1.296875	1.20%
1.3046875	0.59%

Así, obtenemos como aproximación a la raíz $x_{r_1} = 1.3046875$

Ejemplo 2

Aproximar la raíz de $f(x) = \arctan x + x - 1$ hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución

Como vimos en el ejemplo 2 de la sección anterior, la única raíz de $f(x)$ se localiza en el intervalo $[0,1]$. Para poder aplicar el método de bisección, es importante checar que sí se cumplen las hipótesis requeridas.

Sabemos que $f(x)$ es contínua en el intervalo $[0,1]$, y checamos que $f(0)$ y $f(1)$ tengan signos opuestos.

En efecto,

$$f(0) = \arctan 0 + 0 - 1 = -1 < 0$$

Mientras que,

$$f(1) = \arctan 1 + 1 - 1 = 0.7853 > 0$$

Por lo tanto, sí podemos aplicar el método de bisección.

Calculamos el punto medio del intervalo $[0,1]$,

$$x_{r_1} = \frac{1+0}{2} = 0.5$$

Que es la primera aproximación a la raíz de $f(x)$.

Evaluamos $f(0.5) = \arctan(0.5) + 0.5 - 1 = -0.0363 < 0$.

Y hacemos nuestra tabla de signos,

$f(0)$	$f(0.5)$	$f(1)$
$-$	$-$	$+$

Puesto que $f(0.5)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos, entonces la raíz se localiza en el intervalo $[0.5,1]$.

En este punto, solo contamos con una aproximación, a saber, $x_{r_1} = 0.5$, que es el primer punto medio calculado.

Repetimos el proceso, es decir, calculamos el punto medio ahora del intervalo $[0.5,1]$,

$$x_{r_2} = \frac{1+0.5}{2} = 0.75$$

Que es la nueva aproximación a la raíz de $f(x)$.

Aquí podemos calcular el primer error aproximado:

$$|\in_a| = \left|\frac{0.75-0.5}{0.75} \times 100\%\right| = 33.33\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo, continuamos con el proceso.

Evaluamos $f(0.75) = \arctan(0.75) + 0.75 - 1 = 0.3935 > 0$.

Y hacemos la tabla de signos:

$f(0.5)$	$f(0.75)$	$f(1)$
$-$	$+$	$+$

Puesto que $f(0.5)$ y $f(0.75)$ tienen signos opuestos, entonces la raíz se localiza en el intervalo $[0.5,0.75]$.

Calculamos el punto medio,

$$x_{r_3} = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

Y el nuevo error aproximado:

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{0.625 - 0.75}{0.625} \times 100\%\right| = 20\%$$

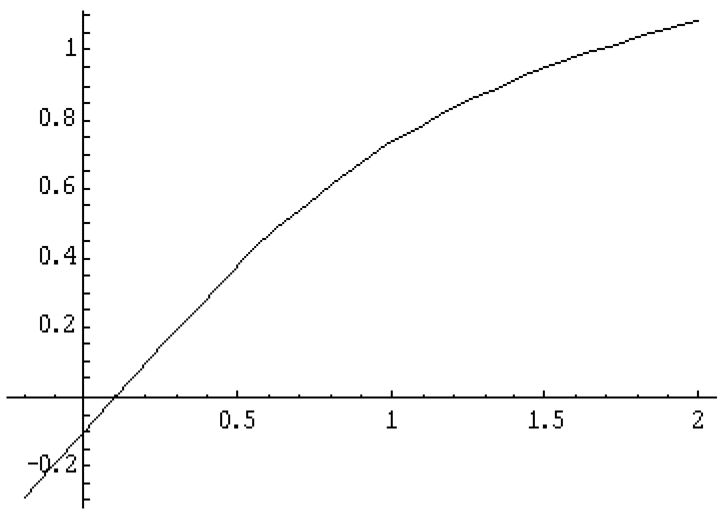
El proceso se debe continuar hasta que se logre el objetivo.

Resumimos los resultados que se obtienen en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
0.5	
0.75	33.33%
0.625	20%
0.5625	11.11%
0.53125	5.88%
0.515625	3.03%
0.5234375	1.49%
0.51953125	0.75%

De lo cual, vemos que la aproximación buscada es $x_{r_8} = 0.51953125$

El método de bisección por lo general es lento, y en casos como el de la siguiente gráfica, puede ser demasiado lento.



En un caso como éste, el proceso de bisección comienza a acercarse a la raíz de forma muy lenta, ya que el método solamente toma en cuenta que la raíz se encuentra dentro del intervalo, sin importar si se encuentra más cerca de alguno de los extremos del intervalo. Sería bueno implementar un método que tome en cuenta este detalle.

Esto da lugar al siguiente método de aproximación de raíces.

Ejercicio sobre el método de bisección (otra forma de calcular)

1. Calcular la $\sqrt{5}$, si $2 \leq x \leq 2.5$ a=2 c=2.5

   Solución:

   Si : x = f(x) …. (1) y x= $\sqrt{5}$ ………(2)

   Elevando al cuadrado ambos miembros en (2), tendremos:

   $x^2 = 5$ ……….. (3)

   Luego hacemos:

   $x^2 - 5 = 0$ ……...(4)

   Entonces comparamos: (1) y (4):

   f(x) = $x^2 - 5$ La misma que debe cumplir con la siguiente condición :

   f(a). f(c) $\leq$ 0 reemplazando con a y c tenemos :

   f(2)= -1 f(2.5)= 1.25 -1*1.25 = -1.25 lo cual es < que cero

   de la restricción dada, en el ejemplo tenemos:

   b= $\frac{a+c}{2}$ = $\frac{2+2.5}{2} = 2.25$

los mismos que podemos colocar en tablas:

01	x	F(x)
a	2	-1
b	2.25	0.0625
c	2.5	6.5

02	x	F(x)
a	2	-1
b	2.125	-0.4843
c	2.25	0.0625

03	x	F(x)
a	2.125	-0.4843
b	2.1875	-0.2148
c	2.25	0.0625

04	x	F(x)
a	2.1875	-0.2148
b	2.21875	-0.07715
c	2.25	0.0625

05	x	F(x)
a	2.21875	- 0.07715
b	2.2344	- 0.00757
c	2.25	0.0625

06	x	F(x)
a	2.2344	- 0.00757
b	2.2422	- 0.0.2747
c	2.25	0.0625

07	x	F(x)
a	2.125	-0.4843
b	2.1875	-0.2148
c	2.25	0.0625

08	x	F(x)
a	2.1875	-0.2148
b	2.21875	-0.07715
c	2.25	0.0625

09	x	F(x)
a	2.2344	- 0..00757
b	2.2354	0.003210
c	2.2365	0.00625

Podemos concluir que la raíz cuadrada de 5 es : 2.2354 con un error de 10^{-3}

MÉTODO DE PUNTO FIJO

El método de la iteración de punto fijo para resolver una ecuación no lineal

$$f(x) = 0$$

pasa por transformarla en una equivalente,

$$x = g(x)\,,$$

y ejecutar la iteración

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

a partir de un cierto $x^{(0)}$ hasta que se satisfaga el criterio de parada elegido o se alcance el número de iteraciones máximo admitido.

Ejemplos:

1) La ecuación $\cos x - x = 0$ se puede transformar en $\cos x = x$.

2) La ecuación $\tan x - e^{-x} = 0$ se puede transformar en $x + \tan x - e^{-x} = x$.

Teorema de punto fijo. Supongamos que

(i) $g, g' \in C[a,b]$,

(ii) K es una constante positiva,

(iii) $p_0 \in (a,b)$

(iv) $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$.

Entonces hay un punto fijo P de g en [a,b].

Si $|g'(x)| \leq K < 1$ para todo $x \in [a,b]$, entonces P es el único punto fijo de g en [a,b] y la iteración $p_n = g(p_{n-1})$ converge a dicho punto fijo P. En este caso, se dice que P es un punto fijo atractivo.

Si $|g'(x)| > 1$ y $p_0 \neq P$ entonces la iteración $p_n = g(p_{n-1})$ no converge a P. En este caso se dice que P es un punto fijo repulsivo y la iteración presenta divergencia local.

En el ejemplo 1, $g(x) = \cos x$ claramente se cumple la condición de que $|g'(x)| < 1$. Por lo tanto el método sí converge a la raíz.

En el ejemplo 2, $g(x) = x + \tan x - e^{-x}$ y en este caso, $|g'(x)| = |1 + \sec^2 x + e^{-x}| > 1$. Por lo tanto, el método no converge a la raíz.

Interpretación grafica de la iteración de punto fijo:

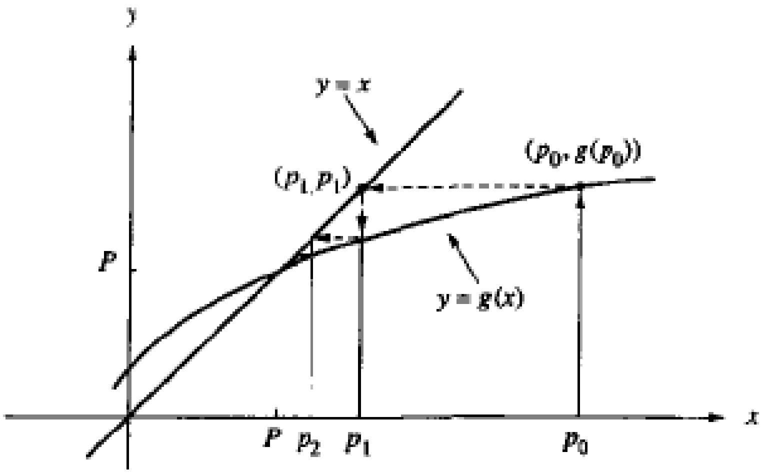


Figure 2.4 (a) Monotone convergence when $0 < g'(P) < 1$.

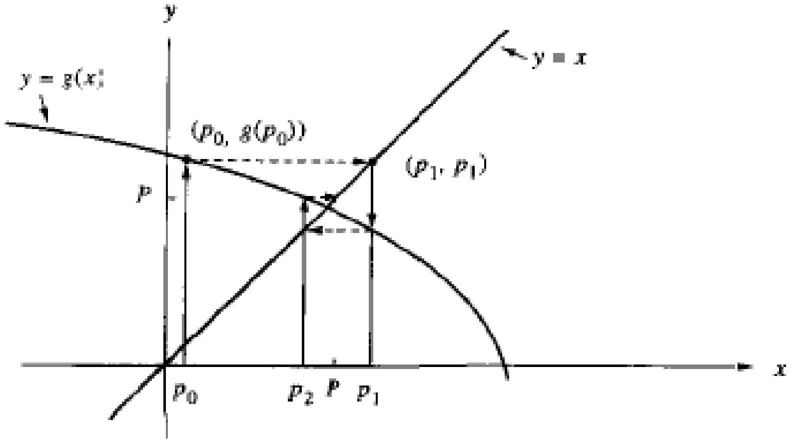


Figure 2.4 (b) Oscillating convergence when $-1 < g'(P) < 0$.

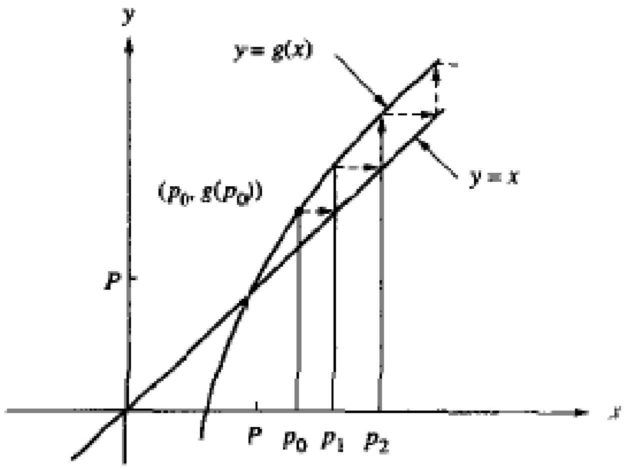


Figure 2.5 (a) Monotone divergence when $1 < g'(P)$.

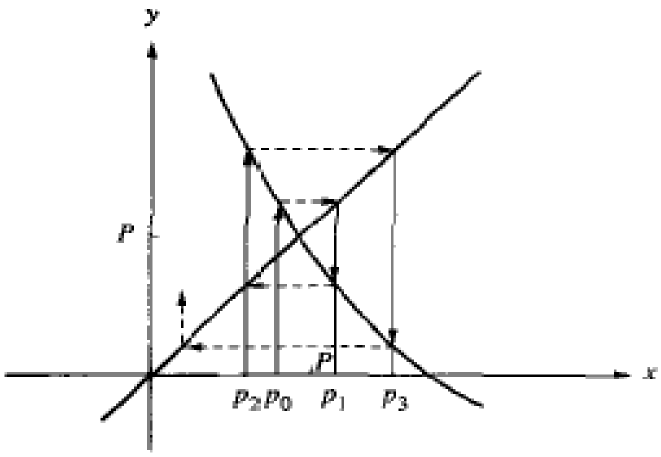


Figure 2.5 (b) Divergent oscillation when $g'(P) < -1$.

Ejemplo: Para la función $g(x) = 1/2(10 - x^3)^{1/2}$

g’(x)<0 en [1,2] ,

$\left|g'(2)\right| \approx 2.12$ no hay convergencia a punto fijo.

Empezando con p0=1.5 y cambiando intervalo a [1,1.5]. Aquí g siga decreciente y además

$\left|g'(1.5)\right| \approx 0.66$ hay convergencia.

Ejercicio. Hallar las raíces de la ecuación x=2cosx partiendo desde x=1 por el método de punto fijo, estudiar el valor de la derivada.

Ejercicio: Usar el método de iteración del punto fijo para aproximar la raíz de $f(x) = x^2 - 5x - e^x$, comenzando con $x_0 = 0$. Hacer 5 iteraciones.

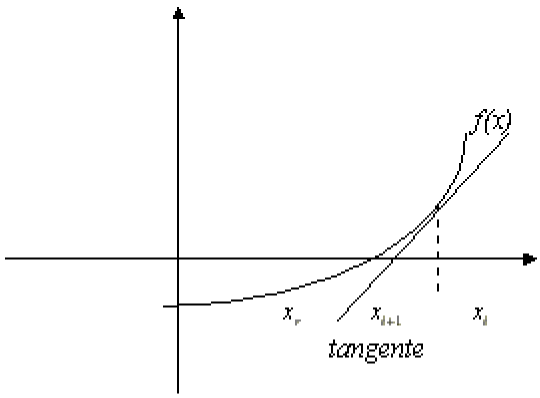
Ejercicio: Averiguar si hay convergencia a punto fijo para la función

$g(x) = (10/(4+x))^{1/2}$ en intervalo [1,2]

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

Este método, el cual es un método iterativo, es uno de los más usados y efectivos. A diferencia de los métodos anteriores, el método de Newton-Raphson no trabaja sobre un intervalo sino que basa su fórmula en un proceso iterativo.

Supongamos que tenemos la aproximación x_i a la raíz x_r de $f(x)$,



Trazamos la recta tangente a la curva en el punto $(x_i, f(x_i))$; ésta cruza al eje x en un punto x_{i+1} que será nuestra siguiente aproximación a la raíz x_r.

Para calcular el punto x_{i+1}, calculamos primero la ecuación de la recta tangente. Sabemos que tiene pendiente

$$m = f'(x_i)$$

Y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

Hacemos $y = 0$:

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

Y despejamos x:

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Que es la fórmula iterativa de Newton-Raphson para calcular la siguiente aproximación:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad \text{si} \quad f'(x_i) \neq 0$$

Note que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde nos asegure que encontraremos la raíz, y de hecho no tenemos ninguna garantía de que nos aproximaremos a dicha raíz. Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge a la raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge. Sin embargo, en los casos donde si converge a la raíz lo hace con una rapidez impresionante, por lo cual es uno de los métodos preferidos por excelencia.

También observe que en el caso de que $f'(x_i) = 0$, el método no se puede aplicar. De hecho, vemos geométricamente que esto significa que la recta tangente es horizontal y por lo tanto no intersecta al eje x en ningún punto, a menos que coincida con éste, en cuyo caso x_i mismo es una raíz de $f(x)$!

<u>Ejemplo 1</u>

Usar el método de Newton-Raphson, para aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln x$, comenzando con $x_0 = 1$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución

En este caso, tenemos que

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x}$$

De aquí tenemos que:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{-e^{-x_i} - \frac{1}{x_i}} = x_i + \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{e^{-x_i} + \frac{1}{x_i}}$$

Comenzamos con $x_0 = 1$ y obtenemos:

$$x_1 = x_0 + \frac{e^{-x_0} - \ln(x_0)}{e^{-x_0} + \frac{1}{x_0}} = 1.268941421$$

En este caso, el error aproximado es,

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.268941421 - 1}{1.268941421} \times 100\%\right| = 21.19\%$$

Continuamos el proceso hasta reducir el error aproximado hasta donde se pidió.

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1	
1.268941421	21.19%
1.309108403	3.06%
1.309799389	0.052%

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE EL METODO DE REDUCCION DE GAUSS-JORDAN

En esta parte el lector hallará la solución de sistemas de ecuaciones lineales usando el
Método de Gauss-Jordan. El tema se presenta en 4 secciones: A) sistemas con solución única, B) sistemas con infinidad de soluciones, C) sistemas sin solución y D) sistemas homogéneos.

A) SISTEMAS CON SOLUCION UNICA

1) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 3x - 2y - 4z &= -3 \\ 5x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

Solución.
a) Escribimos la matriz aumentada del sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Debemos llevar a dicha matriz a su forma escalonada reducida mediante operaciones elementales en los renglones de la matriz, para ésto, escribiremos la matriz y a continuación una flecha. Encima de esta flecha indicaremos la(s) operación(es) que estamos efectuando para que el lector pueda seguir el desarrollo.
Notación para las operaciones elementales en renglones
cR_i nuevo renglón *i* de la matriz aumentada.

$R_i \Leftrightarrow R_j$ intercambio del renglón *i* con el renglón *j*.

$aR_i + R_j$ nuevo renglón *j* de la matriz aumentada.

b) Desarrollo para obtener la forma escalonada reducida.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_3]{-\frac{2}{13}R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & -17 & -7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{17R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & \frac{96}{13} & \frac{192}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{13}{96}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_3+R_1]{-\frac{11}{13}R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{matrix}$$

2) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a - b &= -6 \\ b + c &= 3 \\ c + 2d &= 4 \\ 2a - 3d &= 5 \end{aligned}$$

Solución.

Escribiendo la matriz aumentada del sistema y reduciendo de acuerdo a la operación indicada tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_3+R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_4+R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \therefore \quad \begin{aligned} a &= 31 \\ b &= 37 \\ c &= -34 \\ d &= 19 \end{aligned}$$

B) SISTEMAS CON INFINIDAD DE SOLUCIONES

1) Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 3z &= 5 \\ 2x + 4y - z &= 2 \end{aligned}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & -9 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{16}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{6R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

La última matriz está en su forma escalonada reducida, ya no se puede reducir más, de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} x + \tfrac{5}{8}z &= \tfrac{3}{2} \\ y - \tfrac{9}{16}z &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Despejando *x*, *y*

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{8}z \\ y &= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{16}z \end{aligned}$$

Luego *x*, *y* dependen de *z*, si $z = t$, $t \in$ R, tenemos

$$x = \frac{3}{2} - \frac{5}{8}t$$
$$y = -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}t \; ; \quad t \in \mathbb{R}.$$
$$z = t$$

Es decir, el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones ya que para cada valor de *t* habrá un valor para *x*, *y*, *z*.

Por ejemplo:

Si *T=0* entonces $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{4}, z = 0$, es una solución para el sistema de ecuaciones.

Si T=1 entonces $x = \frac{7}{8}, y = \frac{5}{16}, z = 1$ es otra solución para el sistema de ecuaciones.

Si *T=4* entonces $x = 4, y = -\frac{5}{2}, z = -4$ también es solución para el sistema de ecuaciones.

Así una vez más, remarcamos, el sistema tiene una infinidad de soluciones.

2) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x + 3y + z + 2w &= 1 \\ 2x - y + 3z + w &= 2 \\ -3x + 2y - 2z + 3w &= 3 \\ 2x + 5y - z + 5w &= 4 \end{aligned}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[2R_2+R_4]{\substack{5R_2+R_1 \\ -3R_2+R_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 22 & 26 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -9 & -12 \\ 0 & 7 & 1 & 13 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 6 & 22 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -9 & -12 \\ 0 & 7 & 1 & 13 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{8R_3+R_2 \\ 7R_3+R_4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -34 & -50 & -70 \\ 0 & -1 & -5 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & -34 & -50 & -70 \end{pmatrix} \xrightarrow[-R_3]{-R_2+R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -34 & -50 & -70 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & -34 & -50 & -70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{34}R_3]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{17} & \frac{35}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5R_3+R_2]{-4R_3+R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{17} & -\frac{21}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{17} & \frac{29}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{17} & \frac{35}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x - \tfrac{15}{17}w &= -\tfrac{21}{17} \\ y + \tfrac{28}{17}w &= \tfrac{29}{17} \\ z + \tfrac{25}{17}w &= \tfrac{35}{17} \\ 0w &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x - \tfrac{15}{17}w &= -\tfrac{21}{17} \\ y + \tfrac{28}{17}w &= \tfrac{29}{17} \\ z + \tfrac{25}{17}w &= \tfrac{35}{17} \end{aligned} \quad \therefore \quad \begin{aligned} x &= -\tfrac{21}{17} + \tfrac{15}{17}w \\ y &= \tfrac{29}{17} - \tfrac{28}{17}w \\ z &= \tfrac{35}{17} - \tfrac{25}{17}w \end{aligned}$$

Si $w = t$, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{21}{17} + \tfrac{15}{17}t \\ y &= \tfrac{29}{17} - \tfrac{28}{17}t \\ z &= \tfrac{35}{17} - \tfrac{25}{17}t \\ w &= t \end{aligned} \quad , \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

$\therefore$ Hay infinidad de soluciones.

C) SISTEMAS SIN SOLUCION

1) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 8y - 5z &= 3 \\ 3x - 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= 4 \end{aligned}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -26 & 18 & -8 \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

No hay necesidad de seguir reduciendo, del segundo renglón se tiene $0x + 0y + 0z = -4$ que da la igualdad $0 = -4$ (¡contradicción!), por lo tanto, el sistema no tiene solución.

2) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} a + b - 3c - 4d &= -1 \\ 2a + 2b - c - 2d &= 1 \\ a + b + 2c + 2d &= 5 \end{aligned}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Del tercer renglón se tiene $0a + 0b + 0c + 0d = 3$ que da la igualdad 0=3, luego el sistema no tiene solución.

D) SISTEMAS HOMOGENEOS

Un sistema de ecuaciones lineales se dice HOMOGENEO si cada una de las ecuaciones está igualada a cero es decir

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}
$$

Los sistemas homogéneos SIEMPRE tienen solución ya que

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots\cdots = x_n = 0$$

Es solución del sistema, ésta solución es llamada la *solución trivial*, así un sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene solución única o tiene una infinidad de soluciones.

1) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2x - 3y + z &= 0 \\
x + y - z &= 0 \\
4x + 2y + 3z &= 0
\end{aligned}
$$

Solución.

$$
\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[-4R_1+R_3]{-2R_1+R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-3R_3+R_2}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[-R_2+R_1]{2R_2+R_3}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-\frac{1}{29}R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[-17R_3+R_1]{18R_3+R_2}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Luego x=y=z=0, el sistema tiene solución única, la solución trivial.

Algo más para agregar

Hay dos temas adicionales que se deben de mencionar: La interpolación con los datos igualmente espaciados y la *Extrapolación*.

Ya que los métodos de Newton y de Lagrange son compatibles con los datos espaciados en forma arbitraria, se debe de preguntar por que se aborda el caso de los datos igualmente espaciados. Antes del advenimiento de las computadoras digitales, estos métodos tuvieron gran utilidad en la interpolación de tablas con datos igualmente espaciados. De hecho se desarrolla un esquema conocido como tabla de diferencias divididas para facilitar la implementación de estas técnicas.

Sin embargo, y debido a que las fórmulas son un subconjunto de los esquemas de Newton y Lagrange compatibles con la computadora y ya que se dispone de muchas funciones tabulares como rutinas de biblioteca, la necesidad de puntos equidistantes se fue perdiendo. En particular, se puede emplear en la derivación de fórmulas de integración numérica que emplean comúnmente datos equidistantes.

La extrapolación es el proceso de calcular un valor de f(X) que cae fuera del rango de los puntos base conocidos X0, X1, ... , Xn. La interpolación mas exacta usualmente se obtiene cuando las incógnitas caen cerca de los puntos base.

Obviamente, esto no sucede cuando las incógnitas caen fuera del rango, y por lo tanto, el error en la extrapolación puede ser muy grande. La naturaleza abierta en los extremos de la extrapolación representa un paso en la incógnita porque el proceso extiende la curva más allá de la región conocida. Como tal, la curva verdadera diverge fácilmente de la predicción. Por lo tanto, se debe tener cuidado extremo en casos donde se deba extrapolar.

METODOS DE INTEGRACION

- Método del trapecio
- Método de Simpson 1/3
- Método de Simpson 3/8

MÉTODO DEL TRAPECIO O REGLA DEL TRAPECIO

La regla del trapecio o regla trapezoidal es una de las fórmulas cerradas de Newton-Cotes.

Corresponde al caso donde n = 1, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_1(x)dx$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de interpolación (obviamente de grado 1) para los datos:

x	a	b
y	$f(a)$	$f(b)$

Del capítulo anterior, sabemos que este polinomio de interpolación es:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Integrando este polinomio, tenemos que:

$$\int_a^b f_1(x)dx = f(a)x + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\left[\frac{\cancel{(b-a)^2}}{2}\right]$$

$$= f(a)(b-a) + (f(b)-f(a))\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

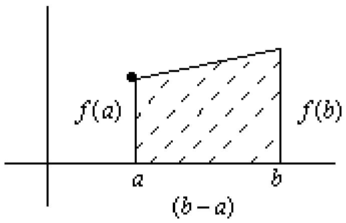
$$= (b-a)\left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2}\right]$$

$$= (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

Que es la conocida Regla del Trapecio. Este nombre se debe a la interpretación geométrica que le podemos dar a la fórmula. El polinomio de interpolación para una tabla que contiene dos datos, es una línea recta. La integral, corresponde al área bajo la línea recta en el intervalo $[a,b]$, que es precisamente el área del trapecio que se forma.



Ejemplo1:

Utilizar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Solución.

Usamos la fórmula directamente con los siguientes datos:

$$a = 0$$
$$b = 1$$
$$f(x) = e^{x^2}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx (1-0)\left[\frac{f(0)+f(1)}{2}\right] = \frac{1+e}{2} = 1.85914$$

REGLA DE SIMPSON

Además de aplicar la regla trapezoidal con segmentos cada vez más finos, otra manera de obtener una estimación más exacta de una integral, es la de usar polinomios de orden superior para conectar los puntos. Por ejemplo, si hay un punto medio extra entre f(a) y f(b), entonces los tres puntos se pueden conectar con un polinomio de tercer orden.
A las fórmulas resultantes de calcular la integral bajo estos polinomios se les llaman Reglas de Simpson.

REGLA DE SIMPSON 1/3

La Regla de Simpson de 1/3 proporciona una aproximación más precisa, ya que consiste en conectar grupos sucesivos de tres puntos sobre la curva mediante parábolas de segundo grado, y sumar las áreas bajo las parábolas para obtener el área aproximada bajo la curva.
Suponemos que tenemos los datos:

a	x_m	b
$f(a)$	$f(x_m)$	$f(b)$

donde x_m es el punto medio entre a y b.
En este caso se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

donde $f_2(x)$ es el polinomio de interpolación para los datos en la tabla anterior. Usaremos el polinomio de Lagrange.
Así, tenemos que:

$$f_2(x) = f(a)\frac{(x-x_m)(x-b)}{(a-x_m)(a-b)} + f(x_m)\frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}$$

Si denotamos, entonces: $h = \frac{b-a}{2} = x_m - a = b - x_m$

$$f_2(x) = f(a)\frac{(x-x_m)(x-b)}{(-h)(-2h)} + f(x_m)\frac{(x-a)(x-b)}{(h)(-h)} + f(b)\frac{(x-a)(x-x_m)}{(2h)(h)}$$

Simplificando términos:

$$f_2(x) = \frac{f(a)}{2h^2}(x-x_m)(x-b) - \frac{f(x_m)}{h^2}(x-a)(x-b) + \frac{f(b)}{2h^2}(x-a)(x-x_m)$$

Vemos que cada uno de los términos anteriores, es esencialmente de la misma forma, es decir, una constante por $(x-\alpha)(x-\beta)$

Así, calculamos la siguiente integral por partes:

Sea: $\int (x-\alpha)(x-\beta)dx$

$$u = x-\alpha \qquad du = dx$$

$$dv = (x-\beta)dx \qquad v = \int (x-\beta)dx = \frac{(x-\beta)^2}{2}$$

por lo tanto,

$$\int (x-\alpha)(x-\beta)dx = (x-\alpha)\frac{(x-\beta)^2}{2} - \int \frac{(x-\beta)^2}{2}dx$$

$$= (x-\alpha)\frac{(x-\beta)^2}{2} - \frac{(x-\beta)^3}{6}$$

Usamos esta fórmula para calcular la integral de cada uno de los tres términos de $f_2(x)$.

$$\int_a^b f_2(x)dx = \frac{f(a)}{2h^2}\int_a^b (x-x_m)(x-b)dx - \frac{f(x_m)}{h^2}\int_a^b (x-a)x-b)dx + \frac{f(b)}{2h^2}\int_a^b (x-a)(x-x_m)dx$$

$$I_1 = \int_a^b (x-x_m)(x-b)dx = (x-x_m)\frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6}\Big]_a^b$$

$$= -(a-x_m)\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a-b)^3}{6} = -(-h)\frac{(-2h)^2}{2} + \frac{(-2h)^3}{6}$$

$$= 2h^3 - \frac{4}{3}h^3 \qquad = \frac{2}{3}h^3$$

$$I_2 = \int_a^b (x-a)()x-b)dx = (x-a)\frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6}\Big]_a^b = \frac{(a-b)^3}{b} = \frac{(-2h)^3}{6} = -\frac{4}{3}h^3$$

$$I_3 = \int_a^b (x-a)(x-x_m)dx = (x-a)\frac{(x-x_m)^2}{2} - \frac{(x-x_m)^3}{6}\Bigg]_a^b$$

$$= (2h)\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{(-h)^3}{6} = h^3 - \frac{h^3}{3} = \frac{2h^3}{3}$$

$$\therefore \int_a^b f_2(x)dx = \frac{f(a)}{2h^2}\left(\frac{2}{3}h^3\right) - \frac{f(x_m)}{h^2}\left(-\frac{4}{3}h^3\right) + \frac{f(b)}{2h^2}\left(\frac{2}{3}h^3\right)$$

$$= f(a)\frac{h}{3} + f(x_m)\frac{4}{3}h + f(b)\frac{h}{3}$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right]$$

Debido al factor $\frac{1}{3}h$ se le conoce como la regla de Simpson de un tercio.

En la práctica, sustituimos el valor de $h = \frac{b-a}{2}$ para obtener nuestra fórmula final:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{f(a) + 4f(x_m) + f(b)}{6}\right]$$

Ejemplo1.

Usar la regla de Simpson de 1/3 para aproximar la siguiente integral:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

Solución.

Aplicamos la fórmula directamente, con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \\ x_m &= 0.5 \\ f(x) &= e^{x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx (1-0)\left[\frac{f(0) + 4f(0.5) + f(1)}{6}\right] = \frac{1 + 4e^{(0.5)^2} + e}{6} = 1.4757$$

REGLA DE SIMPSON 3/8

La derivación de la Regla de los Tres Octavos de Simpson es similar a la regla de un tercio, excepto que se determina el área bajo una parábola de tercer grado que conecta 4 puntos sobre una curva dada. La forma general de la parábola de tercer grado es:

Este caso corresponde a $n = 3$, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_3(x)dx$$

donde $f_3(x)$ es un polinomio de interpolación para los siguientes datos:

x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

Y donde $a = x_0$, $b = x_3$ y x_1, x_2 son los puntos que dividen en tres partes iguales al intervalo $[a,b]$.

Igual que en el caso anterior, se usa el polinomio de interpolación de Lagrange, y usando el método de integración por partes se llega a la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

donde $h = \dfrac{(b-a)}{3}$. Debido al factor $\dfrac{3}{8}h$ es que se le dió el nombre de Regla de Simpson de 3/8. En la práctica, se sustituye el valor de h para obtener:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}\right]$$

Ejemplo1.

Aproximar la siguiente integral, usando la regla de Simpson de 3/8:

$$\int_1^4 e^x \ln x\,dx$$

Solución.

En este caso, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 4 \\ f(x) &= e^x \ln x \end{aligned}$$

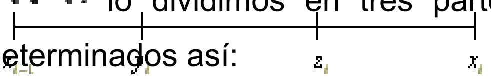
Los cuales sustituimos en la fórmula, para obtener:

$$\int_1^4 e^x \ln x\,dx \approx (4-1)\left[\frac{f(1)+3f(2)+3f(3)+f(4)}{8}\right]$$

$$=\frac{3}{8}\left[e\ln 1+3e^2\ln 2+3e^3\ln 3+e^4\ln 4\right]=58\ 9698$$

Al igual que en los dos casos anteriores, la regla de Simpson de 3/8, se puede extender si subdividimos el intervalo $[a,b]$ en n intervalos de la misma longitud $h=\dfrac{b-a}{n}$.

Sea $x_0, x_1, \ldots, x_n$ la partición determinada de esta forma. Cada sub intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ lo dividimos en tres partes iguales, y sean y_i y z_i los puntos determinados así:



Aplicando la regla de 3/8 en cada uno de los intervalos tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx h\left[\frac{f(x_0)+3f(y_1)+3f(z_1)+f(x_1)}{8}\right]+h\left[\frac{f(x_1)+3f(y_2)+3f(z_2)+f(x_2)}{8}\right]+\cdots$$

$$\cdots+h\left[\frac{f(x_{n-1})+3f(y_n)+3f(z_n)+f(x_n)}{8}\right]$$

$$=\frac{h}{8}\left[f(x_0)+3\left(\sum_{i=1}^{n}\left[f(y_i)+f(z_i)\right]\right)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$=\frac{b-a}{8n}\left[f(x_0)+3\left(\sum_{i=1}^{n}\left[f(y_i)+f(z_i)\right]\right)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

Esta última, es la regla de Simpson de 3/8 para n subintervalos todos de la misma longitud.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Las ecuaciones diferenciales tienen importancia fundamental en las aplicaciones, ya que muchas leyes y relaciones físicas pueden idealizarse matemáticamente en la forma de estas ecuaciones. En particular, el estudio de problemas de equilibrio de sistemas continuos se encuentra dentro de este contexto.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL.

Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden n y cualquier grado, cuya forma general es:

$$F(X, Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Se establece en matemáticas que en su solución general deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces, puede aceptarse que la solución general de (1) es:

$$G(X, Y, C1, C\,2, \ldots, C\,n) = 0 \quad (2)$$

Se distinguen dos tipos de problemas: los llamados de Valores Iniciales y los de Valores en la Frontera.

Un problema de valores iniciales está gobernado por una ecuación diferencial de orden n y un conjunto de n condiciones independientes todas ellas, válidas para el mismo punto inicial. Si la ecuación (1) es la ecuación diferencial que define el problema, y X = a es el punto inicial, puede aceptarse que las n condiciones independientes son:

$$Y(a) = Y_0,\ Y'(a) = Y'_0,\ Y''(a) = Y''_0,\ \ldots,\ Y^{(n)}(a) = Y_0^{(n)} \qquad (3)$$

Por el contrario, en los problemas de valores en la frontera deben establecerse condiciones de frontera en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio de soluciones del problema. En particular en el espacio de una dimensión, hay dos puntos frontera, por ejemplo, X = a y X = b, si el dominio de soluciones es el intervalo cerrado

$$a \leq X \leq b$$

Básicamente la solución numérica de ecuaciones diferenciales consiste en sustituir el dominio continuo de soluciones por uno discreto formado por puntos aislados igualmente espaciados entre sí.
Así, en un problema de valores iniciales, el dominio de definición de soluciones $X \geq a$ se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos,

X0 = a, X 1 = X 0 + h, X 2 = X 0 + 2h, X 3 = X 0 + 3h, ...
y en el caso de valores en la frontera se sustituye el intervalo $a \leq X \leq b$ por el conjunto finito de puntos

X0 = a, X 1 = X 0 + h, X 2 = X 0 + 2h, ... , X n = X 0 + nh = b

Obtenidos, al dividir el intervalo en n partes iguales.

MÉTODO DE EULER

Se llama método de Euler al método numérico consistente en ir incrementando paso a paso la variable independiente y hallando la siguiente imagen con la derivada.
Calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0). De los cursos de Geometría Analítica, sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde m es la pendiente. En este caso, sabemos que la pendiente de la recta tangente se calcula con la derivada:

$$m = y'\big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es :

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0, y por lo tanto estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) + y_0$$

De aquí, tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de h es realmente pequeño, digamos de una décima ó menos. Pero si el valor de h es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h = |x_1 - x_0|$ en n partes iguales (procurando que estas partes sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener entonces la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces de un paso a otro, con la nueva h igual a $\frac{|x_1 - x_0|}{n}$.

En una gráfica, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_0 + h & x_0 + 2h & \cdots x_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y_0 & y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ & & & (\textbf{\textit{solución}}) \end{array}$$

Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Para obtener y_2 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1), y por lo tanto, si sustituimos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general, está dada por:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$ aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud h.

Ejemplo1

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

Aproximar $y(0.5)$.

NOTA

Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.

Solución Analítica.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$
$$\ln 1 = 0^2 + c$$
$$0 = c$$

Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$
$$e^{\ln y} = e^{x^2}$$
$$y = e^{x^2}$$

Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$

Solución Numérica

Aplicamos el método de Euler y para ello, observamos que la distancia entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$ no es lo suficientemente pequeña. Si didimos esta distancia entre cinco obtenemos un valor de $h = 0.1$ y por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos en la formula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 0.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 1 + 0.1\left[2(0)(1)\right] & = & 1 \end{cases}$$

Aplicando nuevamente la formula de Euler, tenemos, en un segundo paso:

$$\begin{cases} x_2 & = & x_1 + h & = & 0.2 \\ y_2 & = & y_1 + hf(x_1, y_1) & = & 1 + 0.1\left[2(0.1)(1)\right] & = & 1.02 \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta obtener y_5. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

Concluimos que el valor aproximado, usando el método de Euler es:

$$y(0.5) \approx 1.2144$$

Puesto que en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la formula de Euler. Tenemos que:

$$|\epsilon_r| = \left|\frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\%\right| = 5.42\%$$

MÉTODO DE RUNGE – KUTTA

Sin entrar en mucho detalle, mencionamos solamente que el método de Runge-Kutta cambia la dirección en el sentido de que no sigue la misma línea de los métodos de Euler. De hecho está basado en una aplicación de los polinomios de Taylor. Comentamos sin embargo, que el método de Runge-Kutta si contiene como casos especiales los de Euler.

Las fórmulas

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

donde

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_n + h, y_n + k_3\right)$$

Se conocen como las reglas o fórmulas de Runge-Kutta de orden cuatro para la ecuación diferencial:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Ejemplo1

Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(0.5)$ dada la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1$$

Solución

Primero, identificamos el mismo ejemplo 1 de los dos métodos anteriores. Segundo, procedemos con los mismos datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Para poder calcular el valor de y_1, debemos calcular primeros los valores de k_1, k_2, k_3 y k_4. Tenemos entonces que:

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.1[2(0.05)(1)] = 0.01$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.1[2(0.05)(1.005)] = 0.01005$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2(0.1)(1.01005)] = 0.020201$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[0 + 2(0.01) + 2(0.01005) + 0.020201] = 1.01005$$

Con el fin de un mayor entendimiento de las fórmulas, veamos la siguiente iteración:

$$x_2 = x_1 + h = 0.2$$

$$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.1[2(0.1)(1.01005)] = 0.020201$$

$$k_2 = h \cdot f(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.1[2(0.15)(1.02010)] = 0.03060$$

$$k_3 = h \cdot f(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.1[2(0.15)(1.02535)] = 0.03076$$

$$k_4 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1[2(0.2)(1.04081)] = 0.04163$$

$$\therefore y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 1.04081$$

El proceso debe repetirse hasta obtener y_5. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01005
2	0.2	1.04081
3	0.3	1.09417
4	0.4	1.17351
5	0.5	1.28403

Concluimos que el valor obtenido con el método de Runge-Kutta es:

$$y(0.5) \approx 1.28403$$

Finalmente, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.28403}{1.28402} \times 100\% \right| = 0.0007\%$$

Con lo cual vemos que efectivamente se ha reducido muchísimo el error relativo. De hecho observamos que tenemos 6 cifras significativas en la aproximación!

BIBLIOGRAFIA Y WEBGRAFIA

Prawda Witenberg, Juan, Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Edit. Limusa, 1976

Nakamura, Métodos numéricos

Carrasco Venegas, Luis, Editorial América, Lima Perú, 1era. Edic. 2002

http://www.unalmed.edu.co/~metnum/integracion.pdf

http://docentes.uacj.mx/gtapia/AN/Unidad2/Newton.htm